Evaluation séquence 1

Calculatrice interdite - 60 minutes

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} 3-2n-5\sqrt{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{4n-5}{-2n^2-3n+7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n-4^n \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2-\sqrt{n^3+8} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{6\sqrt{n}-n}{3+\sqrt{n}}$$

Exercice 2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 3 :

On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = -2u_n + 9$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-2)^n + 3$.

Exercice 4 :

Afin de développer l'impact du télétravail sur son personnel, les dirigeants d'une entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide d'une suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2}$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$, alors on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$.

2) Démontrer par récurrence que tout entier naturel $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.