Partie A :

1) $f(1) = 1$

2) $f(-3) = 1$

3) -1 et 3 sont des antécédents de 3 par g.

4) $S = \{-3 ; 1\}$

5) $S = [-2 ; 6]$

6) $S = [-1,5 ; -1[\cup]3 ; 6]$

7) $S = \{-1 ; 2\}$

8) $S =]-1 ; 2[$

Partie B :

x	-4		2		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	-4		0		2		6
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie C :

1) $f(x) = \dfrac{4 - 2x}{x^2 + 1}$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{4 - 2\times\frac{5}{3}}{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 1} = \frac{4 - \frac{10}{3}}{\frac{25}{9} + 1} = \frac{\frac{12}{3} - \frac{10}{3}}{\frac{25}{9} + \frac{9}{9}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{34}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{34} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 17} = \frac{3}{17}$$

2) $g(x) = x^2 - 2x$

$g(-3) = (-3)^2 - 2\times(-3)$

$g(-3) = 9 + 6$

$g(-3) = 15$

Le point A appartient à la courbe de g.

Exercice bonus :

1) I milieu de [BC]

$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$ $\quad y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$

donc $I\left(\frac{7}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

2) $\vec{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}\vec{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 3 \\ \frac{1}{3}\times(-6) \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{3}\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$

$\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}$

Les coordonnées du point E sont (4 ; 2)

3) $\vec{BE}\begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix}$ $\vec{BE}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \end{pmatrix}$ $\vec{BE}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{IF}\begin{pmatrix} x_F - \frac{7}{2} \\ y_F - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$ $\vec{IF}\begin{pmatrix} x_F - \frac{7}{2} \\ y_F + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Calcul des coordonnées de F

$\vec{CA}\begin{pmatrix} 3-6 \\ 4-(-2) \end{pmatrix}$ $\vec{CA}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{3}\vec{CA}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{CF}\begin{pmatrix} x_F - 6 \\ y_F - (-2) \end{pmatrix}$ $\vec{CF}\begin{pmatrix} x_F - 6 \\ y_F + 2 \end{pmatrix}$

$\vec{CF} = \frac{1}{3}\vec{CA}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = -1 \\ y_F + 2 = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases}$

Calcul du déterminant

$\det(\vec{BE}, \vec{IF}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 - \frac{7}{2} \\ 1 & 0 + \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3 \times \frac{1}{2} - \left(5 - \frac{7}{2}\right) = 0$

$\det(\vec{BE}, \vec{IF}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{IF}$ sont colinéaires, les droites (BE) et (IF) sont donc parallèles.

4) $\vec{IF}\begin{pmatrix} 5-\frac{7}{2} \\ 0-(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$ $\vec{IF}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{ID}\begin{pmatrix} 8-\frac{7}{2} \\ 1-(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$ $\vec{ID}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{IF}, \vec{ID}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}$$

$$= 0$$

$\det(\vec{IF}, \vec{ID}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{IF}$ et $\vec{ID}$ sont colinéaires, les points I, F et D sont alignés.