Exercice

1) $\vec{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 2-3 \end{pmatrix}$ $\vec{AE}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{EI}\begin{pmatrix} 5-3 \\ -2-2 \end{pmatrix}$ $\vec{EI}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $\|\vec{AE}\| = AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$

$= \sqrt{6^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{36+1}$

$= \sqrt{37}$

$\|\vec{EI}\| = EI = \sqrt{2^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{4+16}$

$= \sqrt{20}$

3) $M\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_I}{2} \\ \frac{y_A + y_I}{2} \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} \frac{-3+5}{2} \\ \frac{3+(-2)}{2} \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4) AEIU est un parallélogramme donc les coordonnées des vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{UI}$ sont égales.

$\vec{AE}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{IJ}\begin{pmatrix}5-x_J\\-2-y_J\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6=5-x_J\\-1=-2-y_J\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x_J=-1\\y_J=-1\end{cases}$

Les coordonnées du point J sont $(-1;-1)$

Exercice 2

1) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-4 & 1\\2 & -3\end{vmatrix} = (-4)(-3)-2\times 1$

$= 12-2$

$= 10$

$\det(\vec{u},\vec{v}) \neq 0$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow 2\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow 3\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$

$\vec{w} = 2\vec{u}+3\vec{v}$ $\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix}-8+3\\4+(-9)\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$

$3\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix} \Rightarrow -3\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$

$\vec{z} = -3\vec{v}-2\vec{u}$ $\Leftrightarrow \vec{z}\begin{pmatrix}-3-(-8)\\9-4\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{z}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

3) $\det(\vec{u},\vec{z}) = \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = (-5)\times 5 - (-5)\times 5$

$= 0$

$\det(\vec{u},\vec{z}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires.

Exercice 3

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3-9 \\ -2-(-6) \end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix} 7-9 \\ 5-(-6) \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB},\vec{AC}) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = (-6)\times 11 - 4(-2)$

$= -66 + 8$

$= -58$

$\det(\vec{AB},\vec{AC}) \neq 0$ les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) ABED est un parallélogramme donc $\vec{AB} = \vec{DE}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{DE}\begin{pmatrix} x-(-9) \\ y-4 \end{pmatrix}$ $\vec{DE}\begin{pmatrix} x+9 \\ y-4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+9 = -6 \\ y-4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = 8 \end{cases}$

Les coordonnées du point D sont $(-15;8)$

Exercice 4

1) $\vec{YM}\begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-5 \end{pmatrix}$ $\vec{YM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-5 \end{pmatrix}$

$\vec{ES}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ $\vec{ES}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $3\vec{ES}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\vec{YM} = 3\vec{ES} \iff \begin{cases} x+3=6 \\ y-5=12 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=17 \end{cases}$

Les coordonnées du point M sont $(3,17)$

2) $\vec{YN}\begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-5 \end{pmatrix}$ $\vec{YN}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-5 \end{pmatrix}$

$\vec{NS}\begin{pmatrix} 4-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ $\vec{YE}\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -1-5 \end{pmatrix}$ $\vec{YE}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{ES}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$2\vec{YN} - 3\vec{NS} = \vec{YE} + 4\vec{ES}$

$\iff \begin{cases} 2(x+3)-3(4-x) = 5+8 \\ 2(y-5)-3(3-y) = -6+16 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+6-12+3x = 13 \\ 2y-10-9+3y = 10 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5x-6 = 13 \\ 5y-19 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 19 \\ 5y = 29 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{5} \\ y = \frac{29}{5} \end{cases}$

donc $N\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{29}{5} \end{pmatrix}$

Point Bonus

1) $\vec{EJ} + \vec{FJ} + \vec{GJ} + \vec{HJ}$

$= \underbrace{\vec{EJ} + \vec{JH}} + \underbrace{\vec{GJ} + \vec{JF}}$

$= \vec{EH} + \vec{GF}$

$= \vec{EH} - \vec{FG}$

$= \vec{EH} - \vec{EH}$

$= \vec{0}$

2) $\vec{HE} + \vec{HG} = \vec{HJ} + \vec{JE} + \vec{HJ} + \vec{JG}$

$= 2\vec{HJ} + \vec{JE} + \vec{JG}$

$= 2\vec{HJ} + \vec{JE} - \vec{GJ}$

$= 2\vec{HJ} + \underbrace{\vec{JE} - \vec{JE}}_{\vec{0}}$

$= 2\vec{HJ}$