Evaluation séquence 1

Calculatrice interdite - 60 minutes

Exercice 1 :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3-2n-5\sqrt{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n-5}{-2n^2-3n+7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n-4^n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n^3+8}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6\sqrt{n}-n}{3+\sqrt{n}}$

Exercice 2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 3 :

On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = -2u_n + 9$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-2)^n + 3$.

Exercice 4 :

Afin de développer l'impact du télétravail sur son personnel, les dirigeants d'une entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide d'une suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2}$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$, alors on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$.

2) Démontrer par récurrence que tout entier naturel $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

Exercice 1

① $3 - 2n - 5\sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n) = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (3 - 2n - 5\sqrt{n}) = -\infty$

par somme de limite.

② $3^n - 4^n$ F.I $= \infty - \infty$

$3^n - 4^n = 4^n \left(\frac{3^n}{4^n} - 1 \right) = 4^n \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 \right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 = -1$ (S.L.)

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 4^n = -\infty$ (P.L.)

③ $\dfrac{4n-5}{-2n^2-3n+7}$ F.I $= \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\frac{4n-5}{-2n^2-3n+7} = \frac{n\left(4 - \frac{5}{n}\right)}{n^2\left(-2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{4 - \frac{5}{n}}{n\left(-2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{5}{n}\right) = 4$ (S.L.) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = -2$ (S.L.)

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = -\infty$ (P.L.)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-5}{-2n^2-3n+7} = 0$$ Q.L

④ $n^2 - \sqrt{n^3+8}$ FI : $\infty - \infty$

$$n^2 - \sqrt{n^3+8} = n^2\left(1 - \frac{\sqrt{n^3+8}}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \sqrt{\frac{n^3+8}{n^4}}\right)$$

$$= n^2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{8}{n^4}}\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^4} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{8}{n^4}}\right) = 1$ S.L

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - \sqrt{n^3+8} = +\infty$$ P.L

⑤ $$\frac{6\sqrt{n} - n}{3+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\left(6 - \frac{n}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{6 - \frac{n}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}} = \frac{6 - \frac{n\sqrt{n}}{n}}{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{6 - \sqrt{n}}{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}}$$

$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{3}{\sqrt{n}} = 1$

$\lim_{n\to+\infty} 6 - \sqrt{n} = -\infty$ S.L

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{6\sqrt{n} - n}{3+\sqrt{n}} = -\infty$$ Q.L

Exercice 2 :

Initialisation pour $n = 1$

$\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$ La propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité

- hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel $k \geq 1$ $1\times2 + 2\times3 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

- Démontrons que :

La propriété est vraie au rang $k+1$,

$1\times2 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

Par hypothèse $1\times2 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

$\Leftrightarrow 1\times2 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k+1)}{3}$

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, S_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 3 :

Initialisation pour $n=1$

$u_1 = (-2)^1 + 3 = 1$

La propriété est vraie pour $n=1$

Hérédité

- hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un entier $k \geq 1$ $u_k = (-2)^k + 3$

- Démontrons que :

La propriété est vraie au rang $k+1$, soit $u_{k+1} = (-2)^{k+1} + 3$

$u_{k+1} = -2u_k + 9$ par définition.

$u_{k+1} = -2((-2)^k + 3) + 9$ par hypothèse de récurrence

$u_{k+1} = -2(-2)^k - 6 + 9$

$u_{k+1} = (-2)^{k+1} + 3$

Conclusion

La propriété est vraie pour $n=1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$ soit $u_n = (-2)^n + 3$

Exercice 4

1) $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ $\quad D_f = [0; +\infty[$

f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$

$f'(x) = \frac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$

$f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$

f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2) Initialisation pour $n=0$

$u_0 = 1$ $\quad u_1 = \frac{5+4}{1+2} = 3$ $\quad 0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$

La propriété est vraie pour $n=0$

Hérédité

- hypothèse de récurrence :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier $k \geqslant 0$ $\quad 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$

- Démontrons que :

La propriété est vraie au rang $k+1$, soit $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$:

Par hypothèse $\quad 0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$

La fonction f est strictement croissante donc

$$f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$$

$$2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$$

$$0 \leq 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$$

Conclusion

La propriété est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n soit

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.